

LÖSUNGEN

① Sei μ ein Inhalt auf einem Ring $\mathcal{R} \subset \mathcal{P}(X)$ und $M_1, \dots, M_n \in \mathcal{X}$.

Angenommen es ex. $B_i \in \mathcal{R}$ für $i=1, \dots, n-1$ mit $M_i \subseteq B_i$ und die B_i paarw. disj., so ist

$$\mu^*(M_1 \cup \dots \cup M_n) = \mu(M_1) + \dots + \mu(M_n)$$

„ $\leq$ “ gilt stets, da äußere Maße subadd. sind.

„ $\geq$ “ Sei $(A_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine Überd. von M durch Mengen aus $\mathcal{R}$, sowie $B_n := (B_1 \cup \dots \cup B_{n-1})$

Dann ist $(A_k \cap B_i)_{k \in \mathbb{N}}$ eine Überdeckung von M_i für $i=1, \dots, n$ durch Mengen aus $\mathcal{R}$, da $\mathcal{R}$ n -stabil. ($\cup$ -stabil)

$$\mu^*(M_1) + \dots + \mu^*(M_n) \leq \sum_{i=1}^n \sum_{k \in \mathbb{N}} \mu(A_k \cap B_i) = \sum_{k \in \mathbb{N}} \underbrace{\sum_{i=1}^n \mu(A_k \cap B_i)}_{=\mu(A_k)} = \sum_{k \in \mathbb{N}} \mu(A_k)$$

Das Bilden von dem Infimum über alle solche Überd. zeigt „ $\geq$ “

② Betrachte den Halbring $\mathcal{A}^0 := \{ \{n\} : n \in \mathbb{N} \cup \{\emptyset\} \}$ und den Inhalt der durch $\mu_a(\{n\}) = a^n = \begin{cases} a & \text{falls } n=1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$ definiert ist ($\mu(\emptyset) = 0$).

Dieser setzt sich fort zu einem Inhalt auf dem Ring $\mathcal{R}$ der endl. Teilm. von $\mathbb{N}$ und weiter zu einem Inhalt auf der erzeugten Algebra $\mathcal{A}$ mit $\mu_a(\mathbb{N}) = 1$.

Def. μ_b analog

Dann def. $A_n = \{n\} \times \mathbb{N}$ und $B_n = \mathbb{N} \times \{n\}$ die gewünschten Zerlegungen für die Produktalgebra auf $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ und $\mu_a \otimes \mu_b$

③ (1) Jeder halboffene Quader im $\mathbb{R}^d$ ist eine abz. disj. Vereinigung von halboffenen Würfeln.

(Idee: schreibe einen bel. Quader als aufsteigende Vereinigung von Quadern mit rationalen

Ecken, wobei wir O.B.d.A. annehmen, dass die linke untere Ecke 0 ist. Dann sind die Differenzen

$Q_{n+1} \setminus Q_n$, sowie Q_n disjunkte Vereinigungen von Quadern mit rationalen Ecken.

Solche lassen sich offensichtlich als Vereinigungen von abz. vielen (sogar endl.) Würfeln schreiben)

(2) Da alle Normen auf $\mathbb{R}^d$ äquivalent sind, ist $F: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ genau dann

(lokal)-Lipschitz bzgl. $\|\cdot\|_2$, wenn sie (lokal)-Lipschitz bzgl. $\|\cdot\|_\infty$ ist.

$$(\|\cdot\|_\infty \leq \|\cdot\|_2 \leq \sqrt{d} \|\cdot\|_\infty)$$

(3) Sei $W_r(x)$ Würfel um $x \in \mathbb{R}^d$ mit $\|\cdot\|_\infty$ -Radius r und $F|_{W_r(x)}$ L -Lipschitz bzgl. $\|\cdot\|_\infty$.

Dann ist $F(W_r(x)) \subseteq \bar{W}_r(F(x))$, also $\lambda^*(F(W_r(x))) \leq \lambda^*(\bar{W}_r(F(x))) = L^d (\lambda^*(W_r(x)))$

$$(\|F(x) - F(y)\|_\infty \leq L \cdot \underbrace{\|x - y\|_\infty}_{\leq r} \text{ für } y \in W_r(x))$$

Sei $W \subseteq \mathbb{R}^d$ ein halboffener Würfel oder ganz $\mathbb{R}^d$ und $A \subseteq W$ mit $\lambda^*(A) < \infty$, sowie $\varepsilon > 0$.

Dann ex. eine abz. Überdeckung von A durch disj. halboffene Quader $(Q_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}^d$ mit $\lambda^*(A) + \varepsilon > \sum_n \lambda(Q_n)$.

Nach Schneiden mit W und (i) ex. somit eine Überdeckung von A durch halboffene disj. Würfel $(w_n)_n$ in W , sodass $\lambda^*(A) + \varepsilon > \sum_n \lambda(w_n)$.

Es folgt: Ist $f|_W$ L -Lipschitz bzgl. d_∞ , so ist

$$\lambda^*(f(A)) \stackrel{(i)}{=} \sum_n \lambda^*(f(w_n)) \stackrel{(ii)}{\leq} L^d \sum_n \lambda(w_n) \leq L^d (\lambda^*(A) + \varepsilon).$$

$f(A) \subseteq \bigcup f(w_n) = \bigcup f|_W$ subadd.

Da $\varepsilon > 0$ bel., folgt $\lambda^*(f(A)) \leq L^d \lambda^*(A)$.

(ii) Dies zeigt (ii) (Ist $\lambda^*(M) = +\infty$, so ist die Ungl. trivial. Bzgl. Standardmetrik müssen wir mit $C = \sqrt[d]{d}$ multiplizieren auf der rechten Seite)

(iii) S_a ist a -Lipschitz bzgl. $\|\cdot\|_\infty$. Damit folgt $\lambda^*(S_a(M)) \leq a^d \lambda^*(M)$

$$\lambda^*(M) \leq a^{-d} \lambda^*(S_a(M)) \Rightarrow \lambda^*(S_a(M)) \geq a^d \lambda^*(M)$$

$= S_a^{-1} \circ S_a$

(i) Lemma: seien (X, d_x) und (Y, d_y) metr. Räume und $f: X \rightarrow Y$ lok. Lipschitz.

Ist X kompakt, so ist f Lipschitz

Wir benutzen:

Lemma ~ sei (X, d) kompakter metrischer Raum, $\mathcal{U}$ eine off. Überdeckung.

Dann ex. ein $\delta > 0$, s.d. jeder Ball mit Radius δ in einem $U \in \mathcal{U}$ enthalten ist.

Lebesgue-Zahl

Bew. für jedes $x \in X$ ex. eine offene Umgebung U_x von x , s.d. $f|_{U_x}$ Lipschitz.

Da X kompakt ist, ex. eine endl. Teilüberd. $U_{x_1}, \dots, U_{x_n}$. Sei $\delta > 0$ eine Lebesgue-Zahl

für die endl. Teilüberd. und L_{δ} das Max. der zugehörigen Lipschitz-Konstanten.

Sei L_{δ} das Max. von $X \setminus X \setminus d_x^{-1}([0, \delta)) \rightarrow \mathbb{R}$, $(x_1, x_2) \mapsto \frac{d_y(f(x_1), f(x_2))}{d_x(x_1, x_2)}$

Dann ist f L -Lipschitz mit $L = \max(L_{\delta}, L_{\delta})$ (leichter mit Widerspruch + Folgenkompaktheit)

(i) Schreibe $\mathbb{R}^d$ als disj. Vereinig. von halboff. Würfeln $(w_n)_n$

Dann ist für eine Nullmenge N auch $N \cap w_n$ eine Nullmenge und damit nach

$$(*) \lambda^*(f(N \cap w_n)) = 0 \text{ für jedes } n \in \mathbb{N}$$

Als abz. Vereinig. von Nullmengen hat $f(N) = \bigcup_n f(N \cap w_n)$ λ^* -Maß 0

(iv) Sei $\tilde{W} \subseteq \mathbb{R}^d$ ein halboffener Würfel. Dann ist $dF|_W$ glm. stetig, also

es ex. zu $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$, s.d. $\|dF_x - dF_y\| < \varepsilon$ für $\|x - y\|_\infty < \delta$

Sei r Seitenlänge von W und $\varepsilon > 0$, $\delta > 0$ sowie oben. Wähle $n \in \mathbb{N}$, s.d. $\frac{r}{n} < \delta$.

Zerlege W in n^d halboff. disj. Würfel W_i mit Seitenlänge $\frac{r}{n}$ und Volumen $(\frac{r}{n})^d$:

dann gilt für jeden Würfel $W_i \in W_i$, der A schneidet $\|dF_x\| < \varepsilon$ für $x \in W$. Es folgt:

$$\lambda^*(F(A \cap \tilde{W})) \leq \sum_{W_i \in W_i} \underbrace{\lambda^*(F(A \cap W_i))}_{=0 \text{ oder } \leq \varepsilon^d \lambda^*(W_i)} \leq \varepsilon^d n^d \left(\frac{r}{n}\right)^d = \varepsilon^d \cdot r^d$$

Mit $\varepsilon > 0$ bel. folgt $\lambda^*(F(A \cap \tilde{W})) = 0$. Wie in (ii) folgt $\lambda^*(F(A)) = 0$

(v) $M^{\dim M}$ ist als Unterraum von $\mathbb{R}^d$ zweitalbählbar $\Rightarrow$ jede off. Überd. von M hat eine abz. Teilüberdeckung. Nach Def. ex. zu $p \in M$ ein C^1 -Diffeomorp.

$K_p: U_p \rightarrow \mathbb{R}^d$ mit $K_p(U_p \cap M) = \mathbb{R}^m$ und U_p off. Umgebung von p in $\mathbb{R}^d$.

Die Überd. $M \subseteq \bigcup_{p \in M} U_p \cap M$ hat eine abz. Teilüberd. $(U_{p_n} \cap M)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ Folge in M .

Da C^1 -Diffeos lokal-Lipschitz sind und $\mathbb{R}^m \subseteq \mathbb{R}^d$ eine Nullmenge, ist auch

$K_{p_n}(\mathbb{R}^m) = U_{p_n} \cap M$ eine Nullmenge $\Rightarrow M$ als Vereinig. von Nullmengen eine Nullmenge

□

(Sei K_p ein Diffeo mit $K(p) = 0$. U Umgebung von p und $K(U \cap M) = V \cap \mathbb{R}^m$:

Da V offen, ex. $r > 0$, s.d. $B_r(0) \subseteq V$. Es ex. ein C^1 -Diffeo

$B_r(0) \rightarrow \mathbb{R}^d$, der Strahlen erhält. Dann ist $\varphi \circ K|_{K^{-1}(B_r(0))}$ die gewünschte Abb.)